SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1
CONJUNTOS NUMÉRICOS; REGULARIDADES NUMÉRICAS E GEOMÉTRICAS

Leitura e Análise de Texto

Observando padrões e regularidades

Você já reparou que as pessoas, em muitos momentos do dia, estão diante de situações que envolvem uma sequência de números? O torcedor procura, em uma tabela no caderno de esportes do jornal, a posição de seu time no campeonato nacional. Para localizar uma determinada residência em uma rua, o carteiro observa certa regra na numeração das casas: de um lado, estão dispostas as casas de numeração par em sequência crescente ou decrescente e, do outro lado, as de numeração ímpar. Em um edifício, a numeração dos apartamentos indica também o andar em que ele se localiza. No hospital, a enfermeira é orientada sobre a sequência de horários em que deve administrar certo medicamento ao paciente.

O ser humano também observa vários movimentos naturais que seguem uma determinada sequência, formando, assim, certo padrão: os períodos do dia, as estações do ano, as fases da Lua e o período de aparecimento de um cometa são alguns desses movimentos.

Desde a Antiguidade, grande parte do trabalho dos matemáticos e cientistas tem sido observar e registrar fenômenos que ocorrem segundo um padrão. O encontro de um padrão ou de uma regularidade será uma das possibilidades de compreensão, previsão e controle desses fenômenos.

Para abordar esse assunto, este Caderno explora, inicialmente, as sequências numéricas que podemos construir a partir dos conjuntos numéricos que conhecemos, são estes: os naturais, os inteiros, os racionais e os reais.

Para lembrar:

Conjunto dos números naturais $\Rightarrow$ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$

Conjunto dos números inteiros $\Rightarrow$ $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$

VOCÊ APRENDEU?

1. Dados os conjuntos seguintes, descritos em linguagem cotidiana, encontre, em cada caso, seus elementos e traduza a descrição dada para a linguagem matemática.

a) O conjunto **A** é formado por números naturais maiores do que 4 e menores ou iguais a 11.

b) O conjunto **B** é formado por números naturais menores ou iguais a 6.

c) O conjunto **C** é formado por números inteiros maiores ou iguais a –3 e menores do que 5.

d) O conjunto **D** é formado por números inteiros maiores ou iguais a –2.

2. Quais são os cinco menores números que pertencem a cada um dos seguintes conjuntos?

a) **E** é o conjunto dos números naturais que são divisíveis por 4.

b) **F** é o conjunto dos números naturais ímpares maiores do que 7.

c) **G** é o conjunto dos números inteiros que elevados ao quadrado resultam em um número menor do que 10.

d) **H** é o conjunto dos números naturais que quando dobrados e somados a 1 resultam em um número maior do que 7.

3. Descreva em linguagem matemática os conjuntos **E**, **F**, **G** e **H**, apresentados no problema anterior.

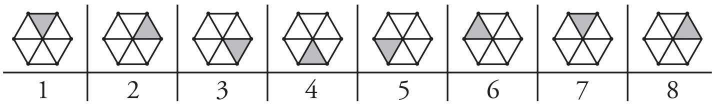
4. Abaixo são apresentadas três sequências numéricas infinitas. Observando cada uma delas, encontre o que se pede:

   a) 1, 1, 1, 1, 1... Qual é o 100º termo?

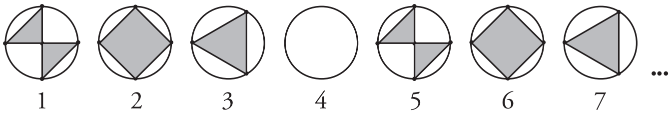
   b) 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1... Qual é o 120º termo?

   c) 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4, 8, 1, 3, 5, 4... Qual é o 25º termo?

5. A seguir é apresentada uma sequência na forma figurativa. Descreva em palavras o padrão de regularidade desta sequência e indique qual deve ser a figura que ocupa a 152ª posição.



6. Observe a sequência de figuras:



Supondo que a lei de formação continue a mesma, desenhe as figuras que deverão ocupar as posições 38ª e 149ª nessa sequência. Justifique sua resposta no espaço a seguir.

7. Observe a sequência (1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 1...). Supondo que permaneça a lei de formação dessa sequência, determine o 38º e o 149º termos.

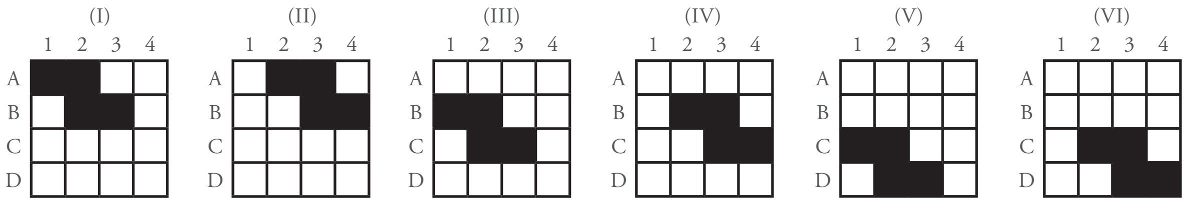
8. Hoje é quarta-feira. Devo pagar uma dívida daqui a exatamente 90 dias. Em que dia da semana cairá o 90º dia?

9. Um processo de reflorestamento previa a plantação de um certo número **x** de mudas de árvores. No primeiro dia, foram plantadas 120 árvores, e planejou-se que nos dias seguintes seriam plantadas, por dia, 10 árvores a mais do que teria sido plantado no dia anterior. Isso sendo feito:

a) quantas árvores serão plantadas no 7º dia?

b) qual é o número **x**, se no final do 10º dia havia sido plantada a metade do total previsto inicialmente?

10. Observe os seis primeiros termos de uma sequência.



Supondo que a regularidade observada na formação desses termos seja mantida para a formação dos demais, isto é, que o termo (I) seja igual ao termo (VII), que o termo (II) seja igual ao termo (VIII), e assim por diante:

a) quais quadrículas estarão pintadas no termo (XXX)?

b) quantas vezes a quadrícula B2 terá sido pintada desde o termo (I) até o termo (XIX)?

LIÇÃO DE CASA

1. Aproveitando as condições apresentadas na *Atividade 9* da seção anterior, crie três questões acompanhadas de sua resolução.

2. Atribui-se ao matemático grego Hipsicles (240-170 a.C.) uma regra para criar uma nova sequência numérica a partir de outra. O método consiste em tomar uma sequência numérica, como a sequência (1, 2, 3, 4, 5, 6...) e criar uma outra em que cada termo é igual à soma dos anteriores. Isto é:

	Sequência nova
1	1
1+2	3
1+2+3	6
1+2+3+4	10
1+2+3+4+5	15
...	...

Pela regra de Hipsicles, a sequência (1, 2, 3, 4...) gerou a sequência (1, 3, 6, 10, 15, 21...).

Aplique a regra de Hipsicles e encontre os 8 primeiros termos de duas novas sequências numéricas geradas a partir da sequência (1, 3, 6, 10, 15, 21...).

3. Uma sequência numérica crescente é composta por cinco termos. O terceiro termo é o número 1 e o quarto e quinto termos são as raízes da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$. Encontre o primeiro e o segundo termos dessa sequência.

VOCÊ APRENDEU?

Sequências definidas por sentenças matemáticas

1. Em uma sequência numérica, o primeiro termo é uma fração de numerador 1 e denominador 4. Os termos seguintes ao primeiro podem ser obtidos adicionando sempre uma unidade ao numerador e ao denominador da fração do termo imediatamente anterior.

   a) Quais são os cinco primeiros termos dessa sequência?

   b) Chamando o primeiro termo de a_1, o segundo termo de a_2, o terceiro de a_3, e assim por diante, quanto é a_9?

   c) Quanto é a_{54}?

d) Como se pode determinar um termo a_n qualquer?

2. Em uma sequência numérica, o primeiro termo é igual a 2 e os seguintes são obtidos a partir do acréscimo de três unidades ao termo imediatamente anterior. Nessa sequência:

a) quais são os cinco primeiros termos?

b) qual é o a_{10}?

c) qual é o a_{20}?

d) como se pode determinar um termo a_n qualquer?

3. Para obter os termos de uma sequência numérica, é necessário fazer o seguinte:

I. Elevar a posição do termo ao quadrado, isto é, calcular 1^2 para o primeiro termo, 2^2 para o segundo termo, 3^2 para o terceiro termo, e assim por diante.

II. Adicionar duas unidades ao resultado obtido após elevar ao quadrado a posição do termo.

Para essa sequência numérica:

a) quais são os cinco primeiros termos?

b) qual é o 8º termo?

c) qual é o a_{20}?

d) como se pode determinar um termo a_n qualquer?

4. Observe os cinco primeiros termos da seguinte sequência numérica: $3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}$.

Verifique que é possível determinar os termos dessa sequência a partir da expressão $a_n = \frac{n+2}{n}$, atribuindo a **n** valores naturais maiores do que zero.

5. A expressão $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ é a expressão do **termo geral** de uma sequência numérica, isto é, os termos da sequência podem ser obtidos se forem atribuídos a **n** valores naturais maiores do que zero. Para essa sequência, encontre:

   a) a_1;

   b) a_5;

   c) o 8º termo;

   d) a posição do termo que é igual a $\frac{9}{11}$.

6. Determinada sequência numérica tem $a_1 = 9$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$ e $a_4 = \frac{1}{3}$. Nessa sequência, qual é:

   a) o 5º termo?

   b) o a_6?

   c) a posição do termo que é igual a $\frac{1}{81}$?

7. Qual das duas expressões listadas a seguir é a expressão do termo geral da sequência da atividade anterior? (Lembre-se que **n** é o número que dá a posição do termo na sequência, isto é, se n = 2, temos o segundo termo, se n = 5, temos o quinto termo, e assim por diante.)

$$a_n = \frac{9}{3^n} \qquad\qquad a_n = 3^{3-n}$$

8. A sequência dos números pares positivos é esta: 0, 2, 4, 6, 8, 10... Nessa sequência:

a) qual é o 10º termo?

b) qual é o 15º termo?

c) qual é o a_{35}?

d) qual é o a_{101}?

e) qual é a posição do termo que é igual a 420?

f) como se pode determinar um termo a_n qualquer?

9. Escreva os cinco primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos.

Nessa sequência:

a) qual é o 10º termo?

b) qual é o a_{13}?

c) qual é o a_{25}?

d) como se pode determinar um termo a_n qualquer?

10. Observe esta sequência numérica 1, 4, 9, 16, 25... Nessa sequência, qual é:

a) o 6º termo?

b) o a_7?

c) a expressão de seu termo geral?

LIÇÃO DE CASA

1. Uma sequência numérica é dada pelo seguinte termo geral:

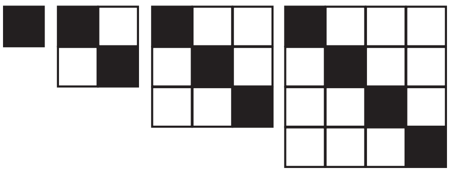
$$a_n = \sqrt{n+1}$$

Para essa sequência, determine:

a) os cinco primeiros termos;

b) os cinco primeiros termos que sejam números inteiros.

2. Observe a sequência de figuras:



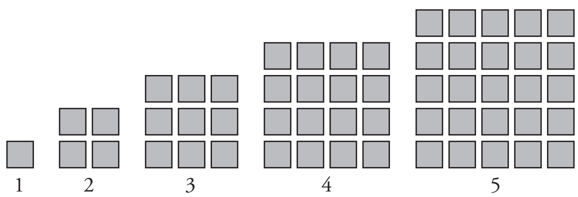
a) Quantos quadrinhos brancos deverá ter a 6ª figura dessa sequência?

b) Escreva uma fórmula que permita calcular a quantidade de quadrinhos brancos, em função da posição **n** da figura, na sequência.
(**Sugestão:** você pode organizar os dados em uma tabela como a que segue.)

Posição da figura na sequência	Número de quadrinhos pretos	Número de quadrinhos brancos
1	**1**	**0**
2		
3		
4		
n		

c) Quantos quadrinhos brancos deverá ter a 39ª figura dessa sequência?

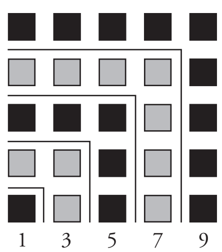
3. A seguir, estão os primeiros elementos de uma sequência de figuras que representam os chamados números quadrangulares. Analise-os e responda às questões propostas.



a) Quantos quadrinhos deverá ter o 6º elemento dessa sequência? E o 10º termo?

b) Escreva a expressão do termo geral dessa sequência.

4. Observe a figura:



Nessa representação, os números escritos logo abaixo da figura indicam a quantidade de quadrinhos de cada um desses conjuntos. Sendo assim responda:

a) Qual é a soma dos números escritos abaixo da 5ª figura?

b) Que relação pode ser estabelecida entre esse resultado e a figura analisada?

c) Utilize os resultados de suas observações para determinar, sem efetuar a adição, o resultado de $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$.

5. Observe as linhas completas da tabela e complete as que estiverem em branco.

Adição	Descrição
$1 + 3 = 4 = 2^2$	A soma dos 2 primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 2.
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$	A soma dos 3 primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 3.
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$	
	A soma dos 5 primeiros números ímpares é igual ao quadrado de 5.
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 2.n - 1 = n^2$	

O que eu aprendi...

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 2
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

VOCÊ APRENDEU?

1. Considere as sequências de (I) a (VI) para responder às questões propostas.

(I) (0, 3, 6, 9, 12...)

(II) (1, 4, 7, 10, 13...)

(III) (2, 5, 8, 11, 14...)

(IV) (–2, 4, –8, 16, –32...)

(V) (0,2; 0,4; 0,6; 0,8...)

(VI) (1, 4, 16, 64, 256...)

a) Escreva os três termos seguintes de cada uma dessas sequências.

b) É verdade que o algarismo 8 não aparece em nenhum número da sequência (II)? Justifique.

c) É possível que um mesmo número natural apareça em duas das três primeiras sequências? Justifique.

d) O número 1 087 é um termo de qual(is) sequência(s)?

e) Mostre que o número 137 não pertence à sequência (II).

f) Escreva o termo geral da sequência (I).

g) Escreva o termo geral da sequência (II).

h) Escreva o termo geral da sequência (III).

i) Escreva o termo geral da sequência (IV).

j) Escreva o termo geral da sequência (V).

k) Escreva o termo geral da sequência (VI).

l) Escolha um critério, justificando-o, e separe as seis sequências em dois grupos.

2. Sabe-se que as Olimpíadas, a Copa do Mundo e os Jogos Pan-Americanos ocorrem de quatro em quatro anos. Se essas competições ocorreram nos anos 2004, 2006 e 2007, respectivamente, e considerando que continuem a acontecer segundo essa regra por muito tempo, responda:

   a) Qual competição ocorrerá em 2118? E em 2079 e 2017?

   b) Haverá algum ano em que ocorrerá mais de uma dessas três competições? Explique.

3. Determinada sequência numérica respeita a seguinte condição: a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma e igual a 6. Se o primeiro termo dessa sequência é –8:

   a) quais são os cinco primeiros termos?

   b) qual é o a_9?

c) qual é o 15º termo?

d) qual é o 20º termo?

e) quanto é a diferença entre a_{12} e a_5?

f) qual é a expressão de seu termo geral, isto é, qual é a fórmula matemática que relaciona um termo qualquer (a_n) à posição do termo (n)?

4. O primeiro termo de uma sequência numérica é 0,02. Para obter os termos seguintes, basta multiplicar o termo imediatamente anterior por 5. Dessa forma, qual é:

a) o 2º termo?

b) o a_3?

c) o a_4?

d) o resultado da divisão entre a_6 e a_4?

e) o termo geral da sequência, isto é, qual é a fórmula matemática que relaciona um termo qualquer (a_n) à posição do termo (n)?

5. Considere que: uma progressão aritmética é uma sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_n...) de números a_n, em que a diferença entre cada termo a_{n+1} e seu antecedente a_n é uma constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão aritmética, e é representada por **r**. Assim, em uma progressão aritmética de razão **r**, temos: $a_{n+1} - a_n = r$; para todo **n** natural, $n \geq 1$. De acordo com essa definição, indique quais das sequências que seguem são progressões aritméticas. Em caso afirmativo determine a razão.

a) (2, 5, 8, 11...)

b) (2, 3, 5, 8...)

c) (7, 3, –1, –5...)

d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}...\right)$

e) $\left(-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0...\right)$

f) $\left(6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}...\right)$

6. Considere as sequências dadas por seus termos gerais:

   I) $a_n = 4.n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

   II) $a_n = 4.n^2 - 1$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

   III) $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} . 3$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

   IV) $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

   Obtenha os cinco primeiros termos de cada uma dessas sequências e destaque a razão daquelas que forem progressões aritméticas.

7. Considere que: uma progressão geométrica é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n...)$, em que cada termo a_n, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação de seu antecedente a_{n-1} por uma constante diferente de zero. De acordo com essa definição, quais das sequências abaixo são progressões geométricas? Justifique sua resposta no espaço a seguir.

   I) (1, 3, 9, 27...);

   II) (1, 2, 6, 24...);

   III) $(36, 12, 4, \frac{4}{3} ...)$;

   IV) (1, –2, 4, –8...);

   V) $\left(3, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2...\right)$;

   VI) $\left(\sqrt{2}, 2, 2.\sqrt{2}, 4...\right)$.

8. Considere as sequências:

I) $a_n = 3.n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

II) $a_n = 3.n^2 - 1$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

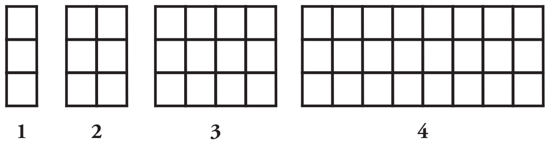
III) $a_n = 3.n$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$;

IV) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1}.2$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

V) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Determine os cinco primeiros termos de cada sequência e destaque a razão daquelas que forem progressões geométricas (PGs) ou progressões aritméticas (PAs).

9. Observe a sequência de figuras e responda às questões propostas.



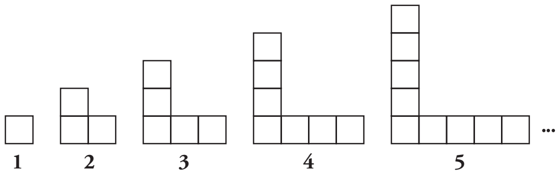
a) Quantos quadradinhos comporão a 5ª figura dessa sequência? E a 6ª figura?

b) Associe a essa sequência uma outra que indique o número de quadradinhos de cada figura. Essa sequência é uma PG? Justifique.

c) Construa uma fórmula que possa ser utilizada para determinar um termo qualquer dessa sequência. Para auxiliá-lo nessa tarefa, a tabela a seguir organiza os dados, a fim de que as regularidades sejam mais facilmente observadas, elemento necessário à construção da fórmula:

Posição de um termo na sequência	Cálculo	Quantidade de quadradinhos
1	**3**	**3**
2	**$3.2 = 3.2^1$**	**6**
3		
4		
...		
n		

10. Nesta figura, cada quadradinho é formado por quatro palitos de comprimentos iguais.



a) A sequência formada pelas quantidades de palitos necessários para a construção das figuras forma uma PA? Justifique sua resposta.

b) Quantos palitos serão necessários para a construção da 6ª figura? E da 7ª?

c) Quantos palitos serão necessários para construir a 78ª figura?

d) Escreva uma fórmula que expresse a quantidade de palitos da figura que ocupa a posição **n** nessa sequência.

11. Sabe-se que o nono termo de uma PA de razão 4 é 29. Qual é o 20º termo dessa PA?

12. Sabe-se que a sequência (8, x, –4, y) é uma progressão aritmética. Determine os valores de **x** e **y**.

LIÇÃO DE CASA

1. Invente uma progressão aritmética. Separe apenas os termos cuja posição **n** é indicada por um número múltiplo de 6 e forme uma outra sequência de números. Essa nova sequência também é uma progressão aritmética? Em caso de resposta afirmativa, determine a razão da PA. Justifique sua resposta.

2. Determine o 8º termo de cada uma das progressões geométricas:

   I) (1, 3, 9, 27...)

   II) $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}...\right)$

3. Determine o 12º termo de uma PG de razão 2, sabendo que o 5º termo dessa sequência é 4.

4. Uma bola é lançada de uma altura de 18 m e seu impacto com o solo provoca saltos sucessivos, de tal forma que, em cada salto, a altura que ela atinge é igual a 80% da altura alcançada no salto anterior. Que altura será alcançada pela bola quando ocorrer o 5º salto? E o 10º salto? (Use uma calculadora.)

5. Dada a PG $\left(\frac{1}{2}, x, 32, y\right)$, determine os valores de **x** e **y**.

6. Suponha que a população de uma cidade tenha uma taxa de crescimento constante e igual a 20% ao ano. No fim do ano 2007, a população era de 50 000 habitantes.

   a) Calcule a população da cidade ao fim de cada um dos quatro anos seguintes e escreva os resultados obtidos em forma de sequência.

b) A sequência obtida é uma PG? Em caso afirmativo, qual é a razão?

c) Encontre uma fórmula que permita calcular a população dessa cidade daqui a **n** anos contados a partir de 2007.

7. Suponha que o valor de um automóvel diminua a uma taxa constante de 10% ao ano. Hoje o valor desse automóvel é R$ 20 000,00.

a) Calcule o valor desse automóvel daqui a quatro anos.

b) Encontre uma fórmula que permita calcular o preço desse automóvel daqui a **n** anos.

VOCÊ APRENDEU?

Tratamento das progressões sob o ponto de vista funcional

1. Um conjunto A é formado apenas pelos seguintes elementos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Assim, podemos escrever: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Um conjunto B é formado por elementos numéricos obtidos a partir dos elementos do conjunto A da seguinte forma: cada elemento de B é 4 unidades a mais do que o triplo do elemento correspondente de A. Dito de outra forma, se chamarmos cada elemento do conjunto A de **n**, e cada elemento do conjunto B de **p**, temos: $p = 4 + 3n$.

   a) Quais são os elementos do conjunto B?

   b) Qual é o tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto A?

   c) Qual é o tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto B?

2. Cada elemento de um conjunto D será obtido a partir de um elemento correspondente do conjunto C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, da seguinte forma: $d = -5c + 15$, onde **c** representa um elemento do conjunto C e **d** representa um elemento do conjunto D.

   a) Quais são os elementos do conjunto D?

   b) Qual é o tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto D?

3. Determinada regra matemática "transforma" cada elemento do conjunto E = {1, 2, 3, 4, 5, 6...} em um outro número, conforme mostra a seguinte representação:

$$\boxed{1} \xrightarrow{\textbf{R}} \boxed{7}$$
$$\boxed{2} \xrightarrow{\textbf{E}} \boxed{13}$$
$$\boxed{3} \xrightarrow{\textbf{G}} \boxed{19}$$
$$\boxed{4} \xrightarrow{\textbf{R}} \boxed{25}$$
$$\boxed{5} \xrightarrow{\textbf{A}} \boxed{31}$$

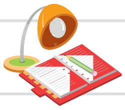
   a) Qual é o resultado associado ao número 6?

   b) Qual é o resultado associado ao número 10?

   c) Se cada elemento do conjunto E for identificado pela letra **n**, e cada resultado for identificado pela letra **p**, qual é a equação matemática que relaciona **p** e **n**?

d) Ordenando os resultados obtidos, qual ocupará a nona posição?

e) Qual é o tipo de sequência numérica formada pelos elementos do conjunto dos resultados?



LIÇÃO DE CASA

1. Na Antiguidade, era muito comum associar adivinhações a problemas matemáticos. Veja esse exemplo:

"Quando ia a Bagdá
Encontrei um homem com 7 mulheres
Cada mulher tinha 7 sacos
Cada saco, 7 gatos
Cada gato, 7 gatinhos.
Gatinhos, gatos, sacos e mulheres
Quantos iam a Bagdá?"

Escreva uma sequência com os elementos da charada e conclua sobre que tipo de sequência numérica é formada.

2. Um número é chamado de palíndromo quando é o mesmo se lido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Assim, os números 55, 121 e 2 002 são palíndromos.

   a) Um conjunto A é formado por todos os números palíndromos de 2 algarismos. Quais são os elementos de A e qual é o tipo de sequência numérica formada por esses elementos?

   b) Um conjunto B é formado por todos os números palíndromos de 3 algarismos. Observando os elementos do conjunto B, podemos dizer que eles formam uma PA? Justifique sua conclusão.

O que eu aprendi...

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3
SOMA DOS TERMOS DE UMA PA OU DE UMA PG FINITAS; APLICAÇÕES À MATEMÁTICA FINANCEIRA

VOCÊ APRENDEU?

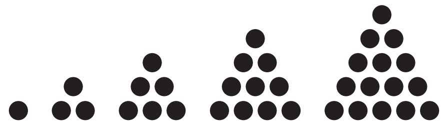
Soma dos termos de uma PA ou de uma PG finitas

1. Calcule a soma dos termos da progressão (10, 16, 22, ..., 70).

2. Calcule a soma dos termos da progressão (13, 20, 27...) desde o 21º termo até o 51º.

3. Calcule a soma dos números inteiros, divisíveis por 23, existentes entre 103 e 850.

4. A figura a seguir apresenta os primeiros elementos de uma sequência de números chamados números triangulares.



a) Escreva a sequência numérica correspondente a essa figura, considerando o número de bolinhas que formam cada triângulo:

1, 3, ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...

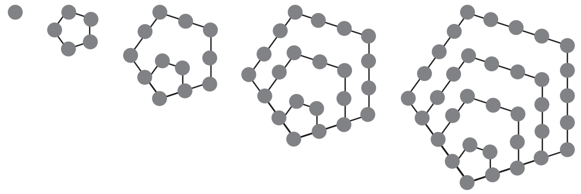
b) Que regularidade você observou na construção desses números triangulares?

c) Escreva uma fórmula que permita calcular um termo qualquer dessa sequência utilizando a recorrência, ou seja, definindo um termo a partir de seu precedente.

d) Construa uma fórmula que calcule um termo qualquer dessa sequência, sem necessariamente recorrer ao termo anterior. Para auxiliá-lo nessa tarefa, você pode organizar os dados na tabela a seguir.

Posição de um termo na sequência	Processo de contagem das bolinhas	Quantidade de bolinhas em cada termo
1		
2		
3		
4		
...		

5. A seguir, estão os primeiros elementos de uma sequência de figuras que representam os chamados números pentagonais.



1 2 3 4 5

a) Quantas bolinhas deve ter a 6ª figura dessa sequência? E a 7ª?

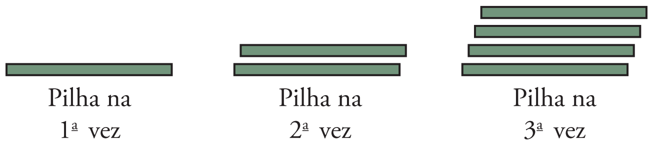
b) Observe as regularidades que existem no processo de construção da figura 2 a partir da figura 1, no processo de construção da figura 3 a partir da figura 2, e assim por diante. Organize os dados na tabela abaixo e, em seguida, procure construir uma fórmula que permita determinar a quantidade de bolinhas da figura **n** nessa sequência.

Posição da figura na sequência	Cálculo	Número de bolinhas

6. Considere a PG (1, 2, 4, 8...). Calcule a soma dos 20 primeiros termos dessa PG, deixando indicada a potência.

7. Resolva a equação $2 + 4 + 8 + ... + x = 510$, sabendo que as parcelas do primeiro membro da equação estão em PG.

8. (Vunesp, 2003) - Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houveram sido colocadas anteriormente.



Determine, ao final de 9 operações:

a) quantas tábuas terá a pilha.

b) a altura, em metros, da pilha.

9. Uma pessoa compra uma televisão para ser paga em 12 prestações mensais. A primeira prestação é de R$ 50,00 e, a cada mês, o valor da prestação é acrescido em 5% da primeira prestação. Quando acabar de quitar a dívida, quanto a pessoa terá pago pela televisão?

10. A primeira parcela de um financiamento de 6 meses é de R$ 200,00, e as demais são decrescentes em 5%. Assim, a segunda parcela é 5% menor do que a primeira, a terceira parcela é 5% menor do que a segunda, e assim por diante. Adotando $0{,}95^5 = 0{,}77$, calcule:

   a) Qual é o valor da última parcela?

   b) Quanto terá sido pago quando a dívida for totalmente quitada?

LIÇÃO DE CASA

1. Dada a progressão aritmética (–4, 1, 6, 11...), obtenha:

   a) o termo geral da sequência;

b) a soma dos 12 primeiros termos;

c) uma expressão para o cálculo da soma dos **n** primeiros termos.

2. A soma de **n** termos de uma progressão aritmética pode ser calculada pela expressão $S_n = 3n^2 - 5n$. Para essa sequência, determine:

a) a soma dos seis primeiros termos;

b) a soma dos sete primeiros termos;

c) o 7º termo;

d) os cinco primeiros termos.

3. Um atleta fora de forma, desejando recuperar o tempo perdido, planeja correr diariamente uma determinada distância, de maneira que a cada dia a distância corrida aumente 20% em relação ao que foi corrido no dia anterior. Começando a correr 10 km no primeiro dia:

a) quanto estará correndo no 4º dia?

b) quantos quilômetros terá corrido em 10 dias? (Dado: $1{,}2^{10} \cong 6{,}2$.)

Leitura e Análise de Texto

Aplicações na Matemática Financeira

O crescimento de um capital a uma taxa constante de juros simples se caracteriza por envolver uma série de termos que formam uma Progressão Aritmética. Por outro lado, no cálculo do crescimento de um capital a uma taxa constante de juros compostos, aparece uma Progressão Geométrica. No exemplo a seguir, podemos comparar a evolução de um capital inicial quando submetido a juros simples e a juros compostos.

VOCÊ APRENDEU?

1. Complete:

Tabela A

Capital = C

Taxa de juros = 5% ao mês

	Evolução do capital a juros simples	Evolução do capital a juros compostos
Inicial	**C**	**C**
Depois de 1 mês	**1,05.C**	**1,05.C**
Depois de 2 meses	**1,10.C**	**$1{,}05^2$.C**
Depois de 3 meses		
Depois de 4 meses		

2. Suponha que um cidadão aplique mensalmente, durante 8 meses, uma quantia fixa de R$ 200,00 a juros simples de 5%. Ao final, depois dos 8 meses de aplicação, quanto terá acumulado essa pessoa? A tabela de capitalização a seguir pode ajudá-lo a organizar o método de resolução:

Tabela B

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Final
Capital	200	210	220	230	240	250	260	270	280
		200	210	220	230	240	250	260	270
			200	210	220	230	240	250	260
				200					
					200				
						200			
							200		
								200	

3. Em relação ao problema anterior, alterando apenas a forma de incidência da taxa de juros, de simples para compostos, pode ser escrita a seguinte **Tabela C**, que precisa ser completada:

Tabela C

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Final
Capital	200	$200.1,05$	$200.1,05^2$	$200.1,05^3$	$200.1,05^4$	$200.1,05^5$	$200.1,05^6$	$200.1,05^7$	$200.1,05^8$
		200	$200.1,05$	$200.1,05^2$	$200.1,05^3$	$200.1,05^4$	$200.1,05^5$	$200.1,05^6$	$200.1,05^7$
			200	$200.1,05$	$200.1,05^2$	$200.1,05^3$	$200.1,05^4$	$200.1,05^5$	$200.1,05^6$
				200	$200.1,05$	$200.1,05^2$	$200.1,05^3$	$200.1,05^4$	$200.1,05^5$
					200				
						200			
							200		
								200	

4. Uma financeira remunera os valores investidos à base de 4% de juros simples. Quanto conseguirá resgatar nesse investimento uma pessoa que depositar mensalmente R$ 500,00 durante 10 meses?

5. Laura aderiu a um plano de capitalização de um banco, depositando mensalmente R$ 1 000,00 durante 12 meses. Se o banco promete remunerar o dinheiro aplicado à taxa de 2% de juros compostos ao mês, calcule quanto Laura resgatará ao final do período. (Dado: $1{,}02^{12} = 1{,}27$.)

6. Carlos deseja comprar um automóvel que custará, daqui a 10 meses, R$ 15 500,00. Para conseguir seu objetivo, Carlos resolveu depositar uma quantia **x** em um investimento que promete remunerar o dinheiro aplicado à razão de 10% de juros simples ao mês. Qual deve ser o valor mínimo de **x** para que Carlos consiga comprar o automóvel ao final dos 10 meses?

7. Uma geladeira cujo preço à vista é de R$ 1 500,00 será financiada em 6 parcelas mensais fixas. Se os juros compostos cobrados no financiamento dessa geladeira são de 3% ao mês, qual é o valor da parcela mensal? (Dado: $1{,}03^6 = 1{,}19$.)

LIÇÃO DE CASA

1. Julia guardou mensalmente R$ 200,00 em um banco que remunerou seu dinheiro à base de 4% ao mês de juros compostos. Ao final de 8 meses de aplicação, Julia usou o dinheiro que havia guardado para dar de entrada em um pacote de viagem que custava, à vista, R$ 5 000,00. Julia pretende financiar o saldo devedor em 5 vezes, em parcelas iguais e fixas, à taxa de 2% ao mês. (Dados: $1{,}04^8 \cong 1{,}37$; $1{,}02^5 \cong 1{,}10$.)

   a) Quanto Julia deu de entrada no pacote de viagem?

   b) Qual é o valor da parcela mensal fixa do financiamento do saldo do pacote de viagem?

PESQUISA INDIVIDUAL

A história do jogo de xadrez é um exemplo bastante interessante de como nossa percepção pode ser enganada quando somamos um grande número de termos de uma sequência. Faça uma pesquisa sobre essa história. Você pode recorrer a *sites* de busca ou ao livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan.

O que eu aprendi...

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 4
LIMITE DA SOMA DOS INFINITOS TERMOS DE UMA PG

Leitura e Análise de Texto

Na Grécia antiga, a contraposição entre discreto e contínuo trazia já alguns problemas de interpretação. Para os pitagóricos, o número era a referência de toda dúvida e toda dificuldade. Segundo eles, se não fosse pelo número e por sua natureza, nada do que existe poderia ser compreendido por alguém, nem em si mesmo, nem com relação a outras coisas. Os números constituíam o verdadeiro elemento de que era feito o mundo. Chamavam um ao ponto, dois à linha, três à superfície e quatro ao sólido. A partir de Um, Dois, Três e Quatro podiam construir um mundo.

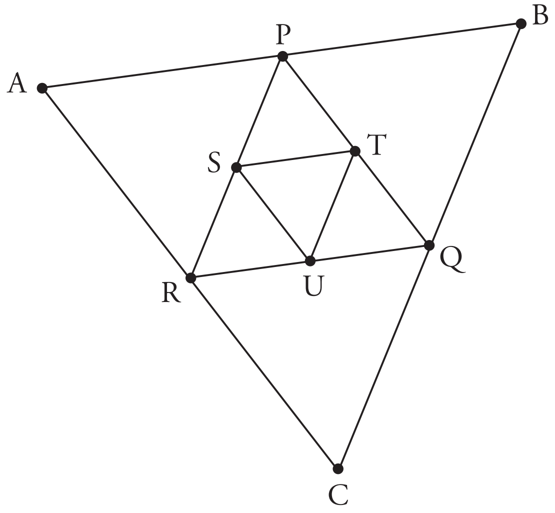
A concepção geométrica dos gregos do século V a.C., influenciada pela visão dos pitagóricos, entendia que o número de pontos de uma linha determinada seria finito, muito embora não fosse possível quantificá-los. Em outras palavras, a noção do contínuo não fazia parte das ideias geométricas de então. Essa concepção de uma série de pontos justapostos, como uma grande fila, de maneira que qualquer segmento pudesse ser mensurável, quantificado como uma determinada quantidade de pontos, caiu por terra a partir da descoberta da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado.

Para refletir:

Dentre os conjuntos numéricos que você já estudou, qual deles nos permite representar grandezas contínuas?

Desafio!

O triângulo ABC da figura é equilátero de lado 1. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos o segundo triângulo PQR. Unindo os pontos médios dos lados do triângulo PQR, obtemos o terceiro triângulo STU, e assim sucessivamente. Determine a soma dos perímetros dos infinitos triângulos construídos por esse processo.



a) Quanto mede o lado PQ do triângulo PQR? E os lados PR e RQ?

b) Qual é o perímetro dos triângulos ABC, PQR e STU?

c) Escreva uma sequência numérica cujos termos são os perímetros dos triângulos ABC, PQR, STU e mais outros dois triângulos construídos segundo o critério.

VOCÊ APRENDEU?

1. Por mais que aumentemos o número de termos na adição,

$$S = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots$$

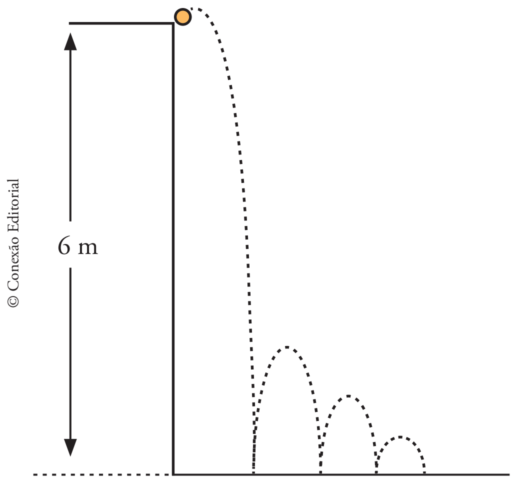
existirá um valor limite, isto é, um valor do qual a soma se aproxima cada vez mais, porém nunca o atinge. Qual é esse valor?

2. Calcule o resultado limite das seguintes somas:

a) $S = -10 + 1 - 0{,}1 + 0{,}01 - 0{,}001 + 0{,}0001 - \ldots$

b) $S = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \cdots$

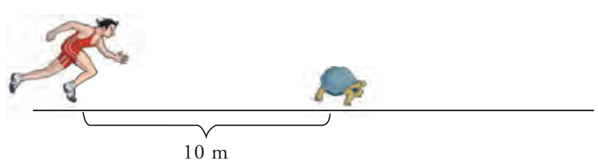
3. Uma bola de borracha cai da altura de 6 m, bate no solo e sobe até a terça parte da altura inicial. Em seguida, a bola cai novamente, bate no solo, inverte o sentido de movimento, e sobe até atingir a terça parte da altura anterior. Continuando seu movimento segundo essas condições, isto é, atingindo após cada batida a terça parte da altura que atingiu após a batida imediatamente anterior, qual será a distância vertical total percorrida pela bola até parar?



4. Resolva a equação em que o primeiro termo da igualdade é o limite da soma dos termos de uma PG infinita: $\frac{x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{x}{32} + \ldots = 18$

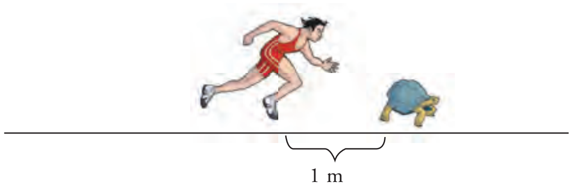
LIÇÃO DE CASA

1. (Adaptado do *Paradoxo de Zenão*) – Uma corrida será disputada entre Aquiles, grande atleta grego, e uma tartaruga. Como Aquiles é 10 vezes mais rápido do que a tartaruga, esta partirá 10 metros à frente de Aquiles, conforme representado no esquema a seguir.



© Conexão Editorial

Quando Aquiles chegou ao ponto em que a tartaruga estava inicialmente, depois de percorrer 10 m, a tartaruga, 10 vezes mais lenta, estava 1 m à frente.



© Conexão Editorial

Aquiles então correu 1 m até o ponto em que a tartaruga estava, mas ela já não estava mais lá: estava 10 cm à frente, pois correu, no mesmo intervalo de tempo, 10 vezes menos que Aquiles, e a décima parte de 1 m é 10 cm.

© Conexão Editorial

Repetindo esse raciocínio para os intervalos de tempo seguintes, parece que Aquiles nunca alcançará a tartaruga, pois ela sempre terá percorrido $\frac{1}{10}$ do que Aquiles percorrer. Será mesmo verdade que ele nunca alcançará a tartaruga?

a) Escreva a sequência das distâncias que Aquiles percorre até chegar ao ponto em que a tartaruga estava a cada vez.

b) A sequência das distâncias é uma PG. Qual é a razão dessa PG?

c) Calcule a soma das infinitas distâncias percorridas por Aquiles até chegar ao ponto em que se encontrava a tartaruga a cada vez.

d) Quantos metros percorrerá Aquiles até alcançar a tartaruga? Ou você acredita que ele não a alcançará?

2. Escreva a expressão $\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2.\sqrt{2}}}}}}...$ como um produto de potências de dois e, depois, encontre o valor da expressão.

3. Uma dívida foi paga mensalmente da seguinte maneira:

1º mês: metade do valor inicial da dívida;

2º mês: metade do valor restante após o pagamento da parcela anterior;

3º mês: metade do valor restante após o pagamento da parcela anterior;

4º mês: metade do valor restante após o pagamento da parcela anterior;

e assim, sucessivamente, até a quitação total da dívida.

Verifique que a soma das parcelas pagas corresponde ao valor total da dívida.

4. Determine a geratriz da dízima 1,777...

O que eu aprendi...