Breve Revisão de Espaços Vetoriais

Valdex Santos

Instituto Federal da Bahia - IFBA

2 de novembro de 2011

Definição de Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial consiste do seguinte:
(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.
(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.
(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto, V fechado com relação operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
(A_1) Comutatividade: $u + v = v + u; \forall u, v \in V$.
(A_2) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w; \forall u, v, w \in V$.
(A_3) Elemento Neutro: Existe um elemento $0_V \in V$ tal que
$u + 0_V = u; \forall u \in V$.
(A_4) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal e que $u + (-u) = 0_V; \forall u \in V$.

Definição de Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial consiste do seguinte:
(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.
(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.
(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto, V fechado com relação operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
(A_1) Comutatividade: $u + v = v + u$; $\forall u, v \in V$.
(A_2) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$; $\forall u, v, w \in V$.
(A_3) Elemento Neutro: Existe um elemento $0_V \in V$tal que $u + 0_V = u; \forall u \in V$.
(A_4) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal e que $u + (-u) = 0_V; \forall u \in V$.

Definição de Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial consiste do seguinte:
(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.
(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.
(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto, V fechado com relação operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
(A_1) Comutatividade: $u + v = v + u$; $\forall u, v \in V$.
(A_2) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$; $\forall u, v, w \in V$.
(A_3) Elemento Neutro: Existe um elemento $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u; \forall u \in V$.
(A_4) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal e que $u + (-u) = 0_V; \forall u \in V$.

Definição de Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial consiste do seguinte:
(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.
(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.
(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto, V fechado com relação operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
(A_1) Comutatividade: $u + v = v + u$; $\forall u, v \in V$.
(A_2) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$; $\forall u, v, w \in V$.
(A_3) Elemento Neutro: Existe um elemento $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u; \forall u \in V$.
(A_4) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal e que $u + (-u) = 0_V; \forall u \in V$.

Definição de Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial consiste do seguinte:
(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.
(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.
(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto, V fechado com relação operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
(A_1) Comutatividade: $u + v = v + u; \forall u, v \in V$.
(A_2) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w; \forall u, v, w \in V$.
(A_3) Elemento Neutro: Existe um elemento $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u; \forall u \in V$.
(A_4) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal e que $u + (-u) = 0_V; \forall u \in V$.

Definição de Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial consiste do seguinte:
(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.
(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.
(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto, V fechado com relação operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
(A_1) Comutatividade: $u + v = v + u$; $\forall u, v \in V$.
(A_2) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$; $\forall u, v, w \in V$.
(A_3) Elemento Neutro: Existe um elemento $0_V \in V$tal que $u + 0_V = u; \forall u \in V$.
(A_4) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal e que $u + (-u) = 0_V; \forall u \in V$.

Definição de Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial consiste do seguinte:
(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.
(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.
(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto, V fechado com relação operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
(A_1) Comutatividade: $u + v = v + u$; $\forall u, v \in V$.
(A_2) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$; $\forall u, v, w \in V$.
(A_3) Elemento Neutro: Existe um elemento $0_V \in V$ tal que
$u + 0_V = u; \forall u \in V$.
(A_4) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal e que $u + (-u) = 0_V; \forall u \in V$.

Definição de Espaço Vetorial

Um Espaço Vetorial consiste do seguinte:
(1) Um conjunto não vazio V de objetos, denominados vetores.
(2) Um corpo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de escalares.
(3) Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos $u, v \in V$ um elemento $u + v \in V$, isto, V fechado com relação operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
(A_1) Comutatividade: $u + v = v + u$; $\forall u, v \in V$.
(A_2) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$; $\forall u, v, w \in V$.
(A_3) Elemento Neutro: Existe um elemento $0_V \in V$ tal que $u + 0_V = u; \forall u \in V$.
(A_4) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ existe o elemento $-u \in V$ tal e que $u + (-u) = 0_V; \forall u \in V$.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:

(M_1) Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

(M_2) Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.

OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:

(M_1) Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

(M_2) Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.

OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:

$(M_1\ )$ Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$(M_2\ )$ Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.

OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:

$(M_1\ )$ Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$(M_2\ )$ Distributividade para a Adição de Elementos:

$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:

$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.

OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:

(M_1) Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

(M_2) Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.

OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:
$(M_1\ )$ Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$
$(M_2\ )$ Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.
(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.
OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:

$(M_1\ )$ Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$(M_2\ )$ Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.

OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:

(M_1) Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

(M_2) Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}.$

(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$

(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V.$

OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:
$(M_1\ )$ Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$
$(M_2\ )$ Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.
(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.
OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Definição de Espaço Vetorial

(4) uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento $u \in V$ e cada escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ um elemento $\alpha u \in V$, isto é, V é fechado com relação a operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:
$(M_1\ )$ Associatividade: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$
$(M_2\ )$ Distributividade para a Adição de Elementos:
$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{F}$.
(M_3) Distributividade para a Multiplicação por Escalar:
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \forall u \in V; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
(M_4) Elemento Identidade: $1_{\mathbb{F}} u = u; \forall u \in V$.
OBS.: Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dizemos que $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real. Quando consideramos o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, dizemos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial complexo.

Exemplos de Espaços Vetoriais

1. O conjunto do números reais, $\mathbb{R}$ com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais, é um espaço vetorial real.
2. O conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, com as operações usuais de adição e multiplicação de números complexos, é um espaço vetorial complexo, considerando o corpo dos escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Entretanto, podemos considerar o corpo de escalares como sendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Desse modo, temos que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial real.
3. O conjunto $\mathbb{R}^n = \{u = (x_1, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$, conjunto de todas as n-uplas reais, com a operações de adição de elementos definida por: $u + v = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ e a operação de multiplicação por escalar definida por: $\lambda u = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ é um espaço vetorial real.

Subespaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto U de V que é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.

Subespaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto U de V que é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.

Subespaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto U de V que é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.

Exemplo 1: O subconjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - ax = 0; a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$.

Subespaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto U de V que é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.

Exemplo 1: O subconjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - ax = 0; a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$.

Teorema(Subespaço Vetorial) Um subconjunto não o vazio U de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, para quaisquer elementos $u, v \in U$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, tem-se que $u + v \in U$ e $\alpha u \in U$.

Subespaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto U de V que é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.

Exemplo 1: O subconjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - ax = 0; a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$.

Teorema(Subespaço Vetorial) Um subconjunto não o vazio U de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, para quaisquer elementos $u, v \in U$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, tem-se que $u + v \in U$ e $\alpha u \in U$.

Exemplo 2: O subconjunto $U = \{f \in C([a, b]) / f(a) = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $C([a, b])$.

Subespaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto U de V que é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.

Exemplo 1: O subconjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - ax = 0; a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$.

Teorema(Subespaço Vetorial) Um subconjunto não o vazio U de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, para quaisquer elementos $u, v \in U$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, tem-se que $u + v \in U$ e $\alpha u \in U$.

Exemplo 2: O subconjunto $U = \{f \in C([a, b]) / f(a) = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $C([a, b])$.

Exemplo 3: Considere o espaço vetorial real $P_3(\mathbb{R})$. O subconjunto $S = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) / p(-1) = 0 \ e \ p'(1) = 0\}$ é um subespaço de $P_3(\mathbb{R})$

Combinação Linear e Subespaço Gerado

Combinação Linear e Subespaço Gerado

Definição de Combinação Linear: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que o elemento $u \in V$ é uma combinação linear dos elementos $v_1, \ldots, v_n \in V$ se existem escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$u = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

Combinação Linear e Subespaço Gerado

Definição de Espaço Gerado: Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e S um conjunto finito de elementos de V, isto é, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$. O subconjunto U construído a partir dos elementos de S da seguinte forma:

$$U = \left\{ u \in V / u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i ; \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}$$

é um subespaço vetorial de V, que vamos denotar por $U = [v_1, \ldots, v_n]$ ou por $U = [S]$, denominado subespaço gerado pelos elementos de S. Dizemos que o conjunto S é um sistema de geradores para o subespaço U.

Combinação Linear e Subespaço Gerado

Exemplo: Considere o subespaço $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) / A = A^t\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.
Mostre que W é gerado pelas matrizes
$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \in V$

Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ é **Linearmente Independente(LI)**

Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ é **Linearmente Independente(LI)** se, e somente se,

Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ é **Linearmente Independente(LI)** se, e somente se, toda combinação linear nula $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V ; \alpha_i \in \mathbb{F}$

Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ é **Linearmente Independente(LI)** se, e somente se, toda combinação linear nula $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V; \alpha_i \in \mathbb{F}$ implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \in V$ é Linearmente Dependente(LD) se, e somente se, é possível uma combinação linear nula $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V; \alpha_i \in \mathbb{F}$ sem que todos os escales seja todos nulos.

Dependência e Independência Linear

Decorrem facilmente das definições as seguintes consequências:
(a) Todo conjunto que contém um subconjunto linearmente dependente é LD.
(b) Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é LI.
(c) Todo conjunto que contém o elemento neutro, 0_V, é linearmente dependente.

Bases e Dimensão

Bases e Dimensão

Definição de Base: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma base de V é um conjunto linearmente independente de elementos de V que gera V.

Bases e Dimensão

Definição de Base: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma base de V é um conjunto linearmente independente de elementos de V que gera V.

Exemplo: Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ e gera o espaço $\mathbb{R}^3$. Logo, β é uma base para $\mathbb{R}^3$, denominada base canônica.

Bases e Dimensão

Definição de Dimensão de um Espaço Vetorial: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, que possui uma base com n elementos. A dimensão de V é definida como sendo o número de elementos de uma base de V. Indicaremos a dimensão do espaço vetorial V por $dim(V) = n$.

Bases e Dimensão

Definição de Dimensão de um Espaço Vetorial: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, que possui uma base com n elementos. A dimensão de V é definida como sendo o número de elementos de uma base de V. Indicaremos a dimensão do espaço vetorial V por $dim(V) = n$.
Exemplo: Considere o espaço vetorial real $M_2(\mathbb{R})$. Temos que o conjunto

$$\beta = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base para $M_2(\mathbb{R})$. Desse modo, $dim(M_2(\mathbb{R}) = 4$.

Bases, Dimensão e Coordenadas

Teorema: Sejam U e W subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V . Então, o subespaço $U + W$ é de dimensão finita e tem-se que

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

.

Coordenadas

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ordenada de V. Então, todo elemento de V é escrito de modo único como uma combinação linear dos elementos de β, isto é, dado o elemento $u \in V$ temos que existe uma única n-upla $(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

Dizemos que c_i é a i-ésima coordenada do elemento u com relação a base ordenada β.

Desse modo, é mais conveniente utilizar a matriz de coordenadas do elemento u a em relação é base ordenada β, que denotamos por $[u]_\beta$, dada por:

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in M_{nx1}(\mathbb{F})$$

Exemplo: Podemos verificar facilmente que $\gamma = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ é uma base ordenada para o espaço vetorial real $P_2(\mathbb{R})$. Determine as coordenadas do elemento $p(x) = 2 + 4x + x^2$ em relação à base ordenada γ.

Desse modo, é mais conveniente utilizar a matriz de coordenadas do elemento u a em relação é base ordenada β, que denotamos por $[u]_\beta$, dada por:

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in M_{nx1}(\mathbb{F})$$

Exemplo: Podemos verificar facilmente que $\gamma = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ é uma base ordenada para o espaço vetorial real $P_2(\mathbb{R})$. Determine as coordenadas do elemento $p(x) = 2 + 4x + x^2$ em relação à base ordenada γ.