Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA

Campus de Jequié

Formulário Matemático[1]

Prof. Valdex Santos

Abril de 2015

Introdução

Este material foi produzido como forma de subsidiar os alunos a assimilarem ou revisarem algumas das fórmulas e propriedades exploradas nos assuntos mais trabalhados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Optamos por escrever algumas definições apenas em termos de simbologia. Este deve ser considerado como um manual de fórmulas e não como única fonte de estudos. Desta maneira, torna-se altamente recomendável ao leitor consultar as referências indicadas e outras fontes de estudo.

Este não é um material acabado e será constantemente revisado e aperfeiçoado. Assim, pedimos a colaboração dos leitores no sentido de indicar possíveis correções assim como sugestões de melhoria.

Valdex Santos
Jequié-BA
Abril de 2015

Sumário

1 Razão

Dados dois números racionais a e b, com $b \neq 0$, chamamos de razão ao quociente de a para b.

Indicamos razão por $\frac{a}{b}$ ou $a \div b$, onde a é o *antecedente* e b é o *consequente*.

2 Proporção

Chama-se de proporção a toda sentença que indica uma igualdade entre duas razões. Podemos representar as proporções das seguintes maneiras:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a : b = c : d$ ou $a : b :: c : d$

2.1 Propriedade fundamental das proporções

Em toda proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos e vice-versa.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow bc = ad \; (a; b; c; d \neq 0)$$

onde b e c são chamados *meios* e a e d são os *extremos*.

2.2 Outras propriedades das proporções

P_1 **-** Em toda proporção, *a soma ou a diferença dos antecedentes está para a soma ou a diferença dos consequentes, assim como um antecedente qualquer está para o respectivo consequente.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a \pm c}{c \pm d} = \dfrac{a}{b} \\ ou \\ \dfrac{a \pm c}{c \pm d} = \dfrac{c}{d} \end{cases} \qquad (a; b; c; d \neq 0)$$

P_2 **-** Em toda proporção, *a soma ou diferença dos dois primeiros termos está para o 1° ou para o 2°, assim como a soma ou diferença dos dois últimos termos está para o 3° ou 4º termo*.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a \pm b}{a} = \dfrac{c \pm d}{c} \\ ou \\ \dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{c \pm d}{d} \end{cases} \qquad (a; b; c; d \neq 0)$$

P_3 **-** Em toda proporção, *o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de um antecedente qualquer está para o quadrado do respectivo consequente*.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{ac}{bd}=\dfrac{a^2}{b^2}\\ ou\\ \dfrac{ac}{bd}=\dfrac{c^2}{d^2}\end{cases}\qquad (a;b;c;d\neq 0)$$

2.3 Proporções múltiplas

Quando temos uma igualdade de três ou mais razões, dizemos que se trata de uma proporção múltipla. Assim podemos ter:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\lambda$$

Obs.: As propriedades P_1, P_2 e P_3 podem ser generalizadas para proporções múltiplas.

3 Grandezas proporcionais e divisão proporcional

3.1 Grandezas diretamente proporcionais

Uma grandeza A é diretamente proporcional a uma grandeza B, quando as razões entre os elementos de A e os seus correspondentes valores em B for uma constante, isto é, sendo $A=(a_1;a_2;a_3;...;a_n)$ e $B=(b_1;b_2;b_3;...;b_n)$, então:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\lambda$$

onde λ é denominado de *fator de proporcionalidade* ou *coeficiente de proporcionalidade*.

3.2 Grandezas inversamente proporcionais

Uma grandeza A é inversamente proporcional a uma grandeza B, quando o produto de todos os elementos de A com os seus correspondentes em B for uma constante, isto é, sendo $A=(a_1;a_2;a_3;...;a_n)$ e $B=(b_1;b_2;b_3;...;b_n)$, então:

$$a_1b_1=a_2b_2=a_3b_3=\cdots=a_nb_n=\lambda$$

4 Produtos Notáveis

i. Quadrado da soma/diferença de dois termos:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ii. Cubo da soma/diferença de dois termos:

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Obs.: Para o desenvolvimento de $(a \pm b)^n$, onde n é um número natural qualquer maior ou igual a 2, veja a seção que trata de Binômio de Newton (14.5).

iii. Diferença de dois quadrados

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

iv. Soma/diferença de dois cubos

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$\vdots$

v. Em geral:

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$

5 Potenciação

5.1 Definição

Dado um número real a e um número natural n, chama-se potência de *base* a e *expoente* n o número a^n que é igual ao produto de n fatores iguais a a, isto é,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\ fatores}$$

5.2 Propriedades

1. $a^m.\, a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m+n}$
3. $(a^m)^n = a^{m.n}$
4. $(a.b)^m = a^m b^m$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, onde $b \neq 0$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$

6 Radiciação

6.1 Definição

A raiz n-ésima (n é chamado expoente) de um número real a (denominado radicando) é igual a um número real b se, e somente se, b elevado a n-ésima potência é igual a a, ou seja,

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

6.2 Propriedades

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$
2. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b \neq 0)$
4. $\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^m = \sqrt[n]{a^{pm}}$
5. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

7 Conjuntos

7.1 União

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

7.2 Interseção

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$

7.3 Diferença

$A - B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$

7.4 Complementar

Se $B \subset A$ então $C_A^B = A - B$

7.5 Propriedades da união e interseção

7.5.1 Propriedade comutativa

i) $A \cup B = B \cup A$

ii) $A \cap B = B \cap A$

7.5.2 Propriedade associativa

i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

7.5.3 Propriedade distributiva

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Obs.: Também são válidas as seguintes propriedades:

iii) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

iiiiii) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

7.5.4 Leis De Morgan

As duas propriedades abaixo são denominadas Leis De Morgan[2]:

i) O complementar da união é igual a interseção dos complementares, ou seja,

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

ii) O complementar da interseção é igual a união dos complementares, ou seja,

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

7.6 Número de elementos da união de conjuntos

De um modo geral, quando A e B são conjuntos finitos, tem-se:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

No caso de três conjuntos, temos

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

[2]Augustus De Morgan (Madura, Índia, 27 de junho de 1806 - Londres, 18 de março de 1871) foi um matemático e lógico britânico. Formulou as Leis de De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática. Mais informações em pt.wikipedia.org

7.7 Conjuntos Numéricos

7.7.1 Conjunto dos Números Naturais($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$[3]

7.7.2 Conjunto dos Números Inteiros($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

7.7.3 Conjunto dos Números Racionais($\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q} = \{x|x = \dfrac{a}{b}\ com\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\}$, ou seja, o Conjunto dos Números Racionais engloba todos os números que podem ser representados na forma de fração com numerador e denominador inteiros.

7.7.4 Conjunto dos Números Irracionais($\mathbb{I}r$)

É o conjunto formado por todos os números que não podem ser representados na forma de fração com numerador e denominador inteiros. São os *decimais infinitos* e *não periódicos*.

7.7.5 Conjunto dos Números Reais($\mathbb{R}$)

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}r = \{x|x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}r\} = \{x|x$ é racional ou x é irracional$\}$

7.7.6 Intervalos

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}|a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}|a \leqslant x \leqslant b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}|a \leqslant x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}|a < x \leqslant b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}|x \leqslant b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}|x < b\}$
- $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}|x \geqslant a\}$
- $(a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}|x > a\}$
- $(-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$

7.7.7 Conjunto dos Números Complexos($\mathbb{C}$)

É o conjunto formado por todos os números z que podem ser escritos na forma:

$$z = a + bi \text{ com } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1$$

[3] Alguns autores de livros de Ensino Superior não consideram o zero como um número natural. Nesse caso, $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$

Obs.: Veja abordagem sobre números complexos na seção 19

7.7.8 Relação entre os Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{I}r \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}r = \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}r = \varnothing$
- $\mathbb{I}r = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

8 Funções

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Usamos a seguinte notação:

$f : A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$(lê-se: f é uma função de A em B) e comumente escrevemos $y = f(x)$.

8.1 Função par e função impar

Função par: $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$
Função impar: $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$

8.2 Função crescente e função decrescente

Função crescente: $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Função decrescente: $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

8.3 Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

a) **Função sobrejetora:** Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
Simbolicamente, $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A | f(x) = y$ ou ainda $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora $\Leftrightarrow Im(f) = B$ (a imagem de f é igual ao seu contradomínio) ;

b) **Função injetora:** Uma função é injetora se para cada dois elementos distintos no domínio temos duas imagens distintas no contradomínio.
Simbolicamente, temos que $f : A \to B$ é injetora $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
Ou equivalentemente, $f : A \to B$ é injetora $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$;

c) **Função bijetora:** Uma função é bijetora quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

8.4 Função Composta

Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, denominados *função composta* de g e f a função $g \circ f : A \to C$, que é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$.

8.5 Função Inversa

Dada uma função $f : A \to B$, bijetora, denomina-se função inversa de f a função $g : B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

8.6 Função Afim

É toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, onde a é chamado *coeficiente angular* e b, *coeficiente linear*.
Obs.: O gráfico de uma função afim é uma reta que intercepta os eixos coordenados nos pontos $(0, b)$ e $(-b/a, 0)$.

8.6.1 Casos particulares

- Função Linear ($b = 0$): $f(x) = ax$
- Função Constante ($a = 0$): $f(x) = b$
- Função Identidade ($a = 1$ e $b = 0$): $f(x) = x$

Obs.: Uma função afim é crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$.

8.6.2 Raiz ou Zero

$x = -b/a$

8.7 Função Quadrática

É toda função de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

Observações:

- O gráfico de uma função quadrática é uma parábola, cujo vértice (x_v, y_v), pode assumir um valor máximo ou mínimo (veja subseção 8.7.4);
- Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e, neste caso, a função admite um valor mínimo y_v no ponto de abscissa x_v;
- Se $a < 0$ a parábola tem concavidade voltada para baixo e, neste caso, a função admite um valor máximo y_v no ponto de abscissa x_v;
- O gráfico de uma função quadrática sempre intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, c)$.

8.7.1 Raízes

$$\begin{cases} \Delta = & b^2 - 4ac \\ x = & \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

8.7.2 Soma e produto de raízes

Sendo x_1 e x_2 raízes de uma função quadrática, então[4]

Soma das raízes: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

Produto das raízes: $x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$

8.7.3 Condição de existência de raízes

- Se $\Delta > 0$ *a função tem duas raízes reais distintas*. Nesse caso, a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos;
- Se $\Delta = 0$ *a função tem duas raízes reais iguais(uma única raiz real)*. Nesse caso, a parábola intercepta o eixo das abscissas em um único ponto;
- Se $\Delta < 0$ *a função não tem raízes reais*(somente raízes complexas, Veja seção 19). Nesse caso, a parábola não intercepta o eixo das abscissas.

[4]Um método prático para encontrarmos raízes de equações quadráticas da forma $x^2 + bx + c = 0$ é procurar dois valores reais cuja *soma é igual ao simétrico do termo* b e cujo *produto é igual ao termo* c.

8.7.4 Valor Extremo - Valor Máximo ou Mínimo de uma Função Quadrática

- $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ (Valor de x para o qual a função admite um valor máximo ou mínimo);
- $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$ (Valor de máximo ou mínimo da função).

8.8 Função Modular

8.8.1 Definição de Módulo

$$|x| = \begin{cases} x, \ se \ x \geq 0 \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}$$

8.8.2 Propriedades modulares

Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos

i. $|-x| = |x|$

ii. [5] $|x^2| = |x|^2 = x^2$

iii. $|x.y| = |x|.|y|$

iv. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

v. $|x+y| \leq |x| + |y|$

vi. $||x| - |y|| \leq |x-y|$

8.8.3 Definição de função modular

É toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$

8.8.4 Propriedades de inequações Modulares

- $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$

8.9 Função Exponencial

8.9.1 Definição

Dado um número real a($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se *função exponencial* de base a a uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.

[5] Não é correto considerar $\sqrt{x^2} = x$, pois isso é verdadeiro somente para $x \geq 0$. Mas é falso para $x < 0$. Por exemplo, se $x = -4$ então $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \neq x$.

Observação sobre a definição: As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ são necessárias, pois:

- Para $a = 0$ e x negativo, não existiria a^x(não teríamos a função definida em $\mathbb{R}$);
- Para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não haveria a^x(não teríamos uma função definida em $\mathbb{R}$);
- Para $a = 1$ e x qualquer número real, $a^x = 1$(função constante).

8.9.2 Observações importantes sobre a função exponencial

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, $f(1) = a$ e $f(x_1 + x_2) = f(x_1).f(x_2)$;
b) o gráfico é uma figura chamada *curva exponencial*, que passa por $(0, 1)$;
c) o gráfico não toca o eixo das abscissas e não tem pontos no terceiro e quarto quadrantes;
d) para $a > 1$ a função é crescente($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$);
e) para $0 < a < 1$ a função é decrescente($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$);
f) a função exponencial é sobrejetora: $Im(f) = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$, sempre existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$;
g) A função exponencial é injetora($x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$);
h) a função exponencial é bijetora, logo admite função inversa (e sua inversa é a função logarítmica, conforme veremos na subseção 8.11);
i) A função exponencial é ilimitada superiormente.

8.9.3 Equação Exponencial

$a^x = a^y \iff x = y$ sendo $0 < a \neq 1$

8.9.4 Inequação Exponencial

$$\begin{cases} a^x & \geq & a^y \\ a^x & \leq & a^y \end{cases}$$

Observações:

- Se $a \geq 1$ então $a^x \geq a^y \Rightarrow x \geq y \text{ e } a^x \leq a^y \Rightarrow x \leq y$;
- Se $0 < a < 1$ então $a^x \geq a^y \Rightarrow x \leq y \text{ e } a^x \leq a^y \Rightarrow x \geq y$.

8.10 Logarítmicos

8.10.1 Definição

Dados dois números reais *positivos* a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^x$, então x chama-se logaritmo de b na base a, ou seja,

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, sendo $b > 0$, $0 < a \neq 1$

8.10.2 Consequências da definição de logaritmo

i. $\log_a 1 = 0$

ii. $\log_a a = 1$

iii. $\log_a a^n = n$

iv. $a^{\log_a b} = b$

8.10.3 Propriedades operatórias dos logaritmos

i. **Logaritmo de um produto**

$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

ii. **Logaritmo de um quociente**

$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

iii. **Logaritmo de uma potência**

$\log_a b^n = n \log_a b$

$\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n} \log_a b$

iv. **Mudança de base**

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Por consequência $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

8.11 Função Logarítmica

8.11.1 Definição

A inversa da função exponencial de base a é a função $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Em outras palavras, **função logarítmica é toda função** $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ **tal que** $f(x) = \log_a x$**, onde** $a, x \in \mathbb{R}$**, sendo** $x > 0$ **e** $0 < a \neq 1$.

Observação: *a é chamado de base e x logaritmando.*

8.11.2 Observações importantes sobre a função logarítmica

a) o gráfico da função logarítmica passa pelo ponto $(1, 0)$, ou seja, $f(1) = 0$, ou, ainda, $\log_a 1 = 0$;

b) o gráfico nunca toca o eixo y nem ocupa pontos do segundo e terceiro quadrantes;

c) quando $a > 1$, a função logarítmica é crescente($x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$);

d) quando $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente($x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$);

e) somente os números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \to a^x$ assume somente valores positivos;

f) Se $a > 1$ os números maiores que 1 possuem logaritmo positivo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo;

g) Se $0 < a < 1$ os números maiores que 1 possuem logaritmo negativo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo positivo;

h) A função logarítmica é ilimita superior e inferiormente[6];

i) A função logarítmica é injetora, pois números positivos diferentes têm logaritmos diferentes. Também é sobrejetora, pois, dado qualquer número real b, existe um único número real positivo x tal que $\log_a x = b$. Portanto, ela é bijetora. Assim a função logarítmica admite função inversa e sua inversa, conforme referimos em 8.11.1, é a função exponencial.

8.11.3 Equação logarítmica

$\log_a x = \log_a y \iff x = y$ sendo $0 < a \neq 1$ e $x, y > 0$

8.11.4 Inequação logarítmica

$$\begin{cases} \log_a x & \geq & \log_a y \\ \log_a x & \leq & \log_a y \end{cases}$$

Observações:

- Se $a > 1$ então $\log_a x > \log_a y \Rightarrow x > y \text{ e } \log_a x < \log_a y \Rightarrow x < y$;
- Se $0 < a < 1$ então $\log_a x > \log_a y \Rightarrow x < y \text{ e } \log_a x < \log_a y \Rightarrow x > y$.

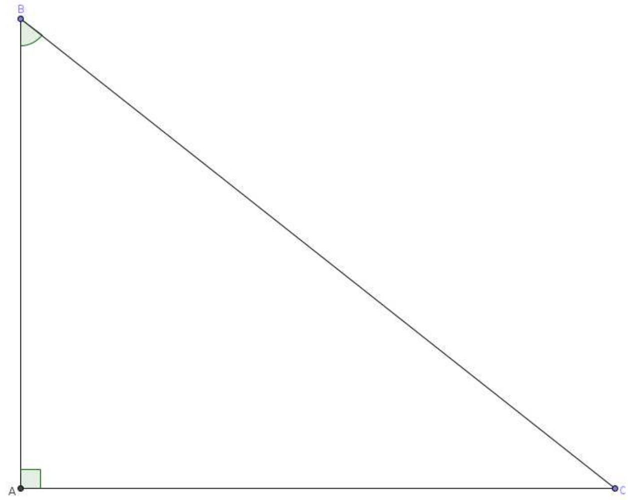
9 Funções Circulares de Trigonometria

9.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em B, fixando um ângulo agudo θ, temos:

[6]No caso $a > 1$ ser ilimitada superiormente significa que se pode obter um valor tão grande para $\log_a x$ quanto se queira, desde que tomemos x suficientemente grande.

- **seno** - é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa:
$\sin \hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$
- **cosseno** - é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa:
$\cos \hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$
- **tangente** - é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo:
$tg\ \hat{B} = \dfrac{AC}{AB}$ ou ainda $tg\ \hat{B} = \dfrac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$



9.2 Ciclo Trigonométrico - Orientação

Positiva $\rightarrow$ no sentido anti-horário negativa $\rightarrow$ no sentido horário

9.3 Tabela de Ângulos Notáveis

θ	30^0	45^0	60^0
$\sin\theta$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$tg\ \theta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

9.4 Tabela de Arcos Extremos do Ciclo Trigonométrico

θ	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$tg\ \theta$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

9.5 Radianos - Graus

$180^0 = \pi\ rad$

$y^0 = x\ rad$

$x = \dfrac{y^0 \pi}{180^0}$

9.6 Transformação de Arcos

9.6.1 Arcos negativos

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $tg(-x) = -tg\ x$

9.6.2 Soma e Diferença de Arcos

- Seno da soma e da diferença de arcos

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

- Cosseno da soma e da diferença de arcos

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

- Tangente da soma e da diferença de arcos

$$tg(x \pm y) = \frac{tg\, x \pm tg\, y}{1 \mp tg\, x\ tg\, y}$$

9.6.3 Arco duplo

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $tg(2x) = \dfrac{2tg\, x}{1 - tg^2\, x}$

9.7 Secante, Cossecante e Cotangente

- Secante: $\sec \theta = \dfrac{1}{\cos \theta}$
- Cossecante: $cossec\ \theta = \dfrac{1}{\sin \theta}$
- Cotangente: $cotg\ \theta = \dfrac{1}{tg\ \theta} = \dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}$

9.8 Identidades Trigonométricas

Segue algumas identidades trigonométricas. A primeira é conhecida como Relação Fundamental da Trigonometria. A segunda, terceira e quarta são derivadas das definições de cossecante, secante e cotangente, respectivamente. Já as identidades (v) e (vi) podem ser deduzidas da primeira.

i. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

ii. $\sin\theta.\, cossec\ \theta = 1$

iii. $\cos\theta.\sec\theta = 1$

iv. $tg\ \theta.\ cotg\ \theta = 1$

v. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

vi. $1 + cotg^2\theta = cossec^2\ \theta$

9.9 Redução de Arcos ao primeiro quadrante

Sendo α é arco do primeiro quadrante, então:

- Para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:
  a) $\sin(\pi - x) = \sin\alpha$
  b) $\cos(\pi - x) = -\cos\alpha$
  c) $tg(\pi - x) = -tg\ \alpha$,

- Para $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$:
  a) $\sin(x - \pi) = -\sin\alpha$
  a) $\cos(x - \pi) = -\cos\alpha$
  c) $tg(x - \pi) = tg\ \alpha$,

- Para $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$:
  a) $\sin(2\pi - x) = -\sin\alpha$
  b) $\cos(2\pi - x) = \cos\alpha$
  c) $tg(2\pi - x) = -tg\ \alpha$,

9.10 Trigonometria num triângulo qualquer

Seja ABC um triângulo qualquer de lados a, b e c respectivamente opostos aos vértices A, B e C.

9.10.1 Lei dos Senos

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

9.10.2 Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\widehat{A})$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos(\widehat{B})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos(\widehat{C})$$

9.11 Funções Trigonométricas

Obs.: As funções trigonométricas são periódicas, ou seja, sempre existe número real $k > 0$ tal que $f(x + k) = f(x)$.

9.11.1 Função seno

É a função que associa a cada número real x o seno de x, isto é, $f(x) = \sin x$

Observações:

1. Domínio: $\mathbb{R}$;
2. Conjunto Imagem: $[-1, 1]$;
3. Período: 2π. Em geral o período da função $\cos mx$ é dado por $P = \dfrac{2\pi}{m}$;
4. É crescente no primeiro e quarto quadrantes e decrescente no segundo e terceiro quadrantes;
5. $\sin x$ é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes.

9.11.2 Função cosseno

É a função que associa a cada número real x o cosseno de x, isto é, $f(x) = \cos x$

Observações:

1. Domínio: $\mathbb{R}$;
2. Conjunto Imagem: $[-1, 1]$;
3. Período: 2π. Em geral o período da função $\sin mx$ é dado por $P = \dfrac{2\pi}{m}$;

4. É crescente no terceiro e quarto quadrantes e decrescente no primeiro e segundo quadrantes;

5. $\cos x$ é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes.

9.11.3 Função tangente

É a função que associa a cada número real x o tangente de x, isto é, $f(x) = tg\ x$

Observações:

1. Domínio: $D = \mathbb{R} - \{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$;

2. Conjunto Imagem: $\mathbb{R}$;

3. Período: π;

4. É crescente em todos os quadrantes;

5. $tg\ x$ é positivo no primeiro e terceiro quadrantes e negativo no segundo e quarto quadrantes.

10 Progressões

10.1 Progressão Aritmética(P. A.)

10.1.1 Razão

$r = a_2 - a_1$ ou $r = a_3 - a_2$ ou ... ou $r = a_n - a_{n-1}$

10.1.2 Termo Geral

$a_n = a_1 + (n-1)r$

10.1.3 Soma dos n primeiros termos

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$

10.1.4 Propriedades

- A soma dos termos extremos é sempre a mesma, ou seja, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$

- Cada termo, a partir do segundo, é igual a média aritmética entre o seu antecessor e o seu sucessor, isto é, $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2}$, ..., $a_{n-1} = \dfrac{a_{n-2} + a_n}{2}$

10.1.5 Escrevendo três termos consecutivos em P. A.

$(x - r, x, x + r)$, onde r é a razão da P. A.

10.2 Progressão Geométrica(P. G.)

10.2.1 Razão

$q = a_2 \div a_1$ ou $q = a_3 \div a_2$ ou ... ou $q = a_n \div a_{n-1}$

10.2.2 Termo Geral

$a_n = a_1.q^{n-1}$

10.2.3 Soma dos n primeiros termos

$S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$

Obs.: Se $q = 1$, temos: $S_n = n * a_1$

10.2.4 Produto dos n primeiros termos

$P_n = a_1^n \, q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

10.2.5 Soma de Termos de uma P.G Infinita

$S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}, |q| < 1$

10.2.6 Propriedades

- O produto dos termos extremos é sempre igual, ou seja, $a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = a_3.a_{n-2} = \ldots$
- Cada termo, a partir do segundo, é igual a média geométrica entre o seu antecessor e o seu sucessor, isto é, $a_2 = \sqrt{a_1.a_3}$, $a_3 = \sqrt{a_2.a_4}$, ..., $a_{n-1} = \sqrt{a_{n-2}.a_n}$

10.2.7 Escrevendo três termos consecutivos em P. G.

$(x.q^{-1}, x, x.q)$, onde q é a razão da P. G.

11 Matrizes

11.1 Definição de Matrizes

Matriz $m \times n$ é uma tabela de números reais, dispostos em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde a_{ij} indica a posição de cada elemento, sendo $i = linha$ e $j = coluna$.

11.2 Casos Especiais

- Matriz linha: $m = 1$
- Matriz coluna: $n = 1$
- Matriz quadrada: $m = n$
- Matriz nula: $a_{ij} = 0, \forall i, j$;
- Matriz Identidade: $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$

onde $\begin{cases} a_{ij} = 1 \; se \; i = j \\ a_{ij} = 0 \; se \; i \neq j \end{cases}$

Propriedade: $A.I_n = I_n.A = A$

11.3 Transposta de uma Matriz

Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, a transposta de A, que se indica por A^t, é a matriz do tipo $n \times m$ que se obtém trocando as linhas por colunas da matriz A. Isto é, a 1ª linha de A^t é igual à 1ª coluna de A, a 2ª linha de A^t é igual a 2ª coluna de A e assim sucessivamente.

11.3.1 Propriedades

i. $\left(A^t\right)^t = A$
ii. $(A + B)^t = A^t + B^t$
iii. $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$
iv. $(AB)^t = B^t A^t$

11.4 Matriz Inversa

A matriz inversa[7] da matriz quadrada A, se existir, será indicada por A^{-1} e será tal que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

[7] A inversa de uma matriz A existe se, e somente se, $\det A \neq 0$(veja seção 12).

11.4.1 Propriedades

i. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
ii. $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$
iii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

11.5 Soma de Matrizes

Tendo as duas matrizes o mesmo número de linhas e colunas, soma-se ou subtrai-se os elementos correspondentes um a um.

11.5.1 Propriedades da adição

i. associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
ii. comutativa: $A + B = B + A$
iii. elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$
iv. elemento oposto: $A + (-A) = 0$.

11.6 Multiplicação de um numero real por uma matriz

Multiplica-se o número real em questão por todos os elementos da matriz.

11.7 Multiplicação de duas matrizes

Dadas duas matrizes A e B, o produto AB só existe se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Por exemplo, dada uma matriz A do tipo $m \times n$ e B do tipo $n \times p$. O produto AB é uma matriz $C = AB$ que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, do tipo $m \times p$.

Ainda pela definição, deve-se obter cada elemento c_{ik} da matriz $C = AB$ da seguinte forma:

(I) Toma-se a linha i da matriz A;

(II) Toma-se a coluna k da matriz B;

(III) Coloca-se a linha i de A na vertical ao lado da coluna k de B;

(IV) Calcula-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado.

(V) Somam-se esses n produtos, obtendo c_{ik}.

11.7.1 Propriedades da Multiplicação

i. associativa: $(AB)C = A(BC)$
ii. distributiva à direita: $(A + B)C = AC + BC$
iii. distributiva à esquerda: $A(B + C) = AB + AC$

12 Determinantes

12.1 Determinantes de Matrizes de ordem 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

12.2 Regra de Sarrus para determinantes de matrizes de ordem 3

(I) Repete-se as duas primeiras colunas ao lado do determinante;

(II) multiplica-se os elementos da diagonal principal e das demais diagonais que têm o mesmo sentido;

(III) Soma-se os produtos obtidos no item anterior;

(IV) Multiplica-se os elementos da diagonal secundária e das demais diagonais que têm o mesmo sentido;

(V) Soma-se os produtos obtidos no item anterior;

(VI) Subtrai-se a soma obtida no item (III) da soma obtida no item (V).

12.3 Teorema de Laplace para o Cálculo de Determinantes

12.3.1 Menor complementar

Se a_{ij} é um elemento da matriz A de ordem n, então o menor complementar do elemento a_{ij} é o determinante que se obtém retirando-se a linha i e a coluna j da matriz A. Indicamos o menor complementar do elemento a_{ij} por M_{ij}.

12.3.2 Complemento algébrico ou cofator

Indica-se por A_{ij} e é dado por: $A_{ij} = (-1)^{i+j} * M_{ij}$

12.3.3 Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem $n(n > 1)$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores. Por exemplo, dada uma matriz A de ordem 4, então o determinante de A pode ser dado por:

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} * M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} * M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} * M_{13}$$

12.4 Propriedades dos Determinantes

a) Trocando-se a posição de duas filas paralelas de uma matriz, seu determinante não se altera em módulo, apenas trocando de sinal;
b) Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo;
c) Multiplicando-se (ou dividindo-se) uma fila qualquer de uma matriz por um número, seu determinante fica multiplicado (ou dividido) por esse número;
d) Sendo A, uma matriz quadrada de ordem n, e α o um número real, então: $\det(\alpha * A) = \alpha^n * detA$;
e) **Teorema de Jacobi:** um determinante não se altera quando se soma a uma de suas filas uma outra fila paralela previamente multiplicada por uma constante;
f) $\det(A * B) = \det A * \det B$;
g) $\det A = \det A^t$;
h) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

13 Sistemas Lineares

É Todo sistema com uma ou mais equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & a_{m3}x_3 & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

13.1 Regra de Cramer

Um sistema linear de n equações a n incógnitas pode ser resolvido pela regra de Cramer:

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D}, x_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \dots, x_n = \frac{D_{xn}}{D}$$

onde D *é o determinante da matriz dos coeficientes,* D_{x1} *e o determinante da matriz obtida substituindo-se a coluna de coeficientes da variável* $x1$ *pela coluna dos termos independentes,*

D_{x2} e o determinante da matriz obtida substituindo-se a coluna de coeficientes da variável $x2$ pela coluna dos termos independentes e assim sucessivamente.

13.2 Classificação dos Sistemas Lineares

- Se $D \neq 0$ - o sistema é possível e determinado;
- Se $D = D_{x1} = D_{x2} = ... = D_{xn} = 0$ - o sistema é possível e indeterminado;
- Se $D = 0$ e $(D_{x1} \neq 0$ ou $D_{x2} \neq 0$ ou ... ou $D_{xn} \neq 0)$ - o sistema é impossível.

14 Análise Combinatória & Binômio de Newton

14.1 Fatorial

$n! = n \times (n-1) * (n-2) * ... * 3 * 2 * 1, \forall n \in N^*$.
Observação: Por conversão $0! = 1$.

14.2 Permutações

- Permutação Simples: $P_n = n!$.
- Permutação com Repetição: $P_n^{\alpha,\beta,...} = \dfrac{n!}{\alpha!\beta!...}$ (com $\alpha + \beta + ... \leq n$)
- Permutação Circular: $P_c^n = (n-1)!$

14.3 Arranjos

- Arranjos Simples: $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
- Arranjos com Repetição: $AR_{n,p} = n^p$

14.4 Combinação

- Combinação Simples: $C_{n,p} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
- Combinação com Repetição: $CR_{n,p} = C_{n+p-1,p}$

14.5 Binômio de Newton

14.5.1 Desenvolvimento

a) $(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\ x^{n-i}\ a^i = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^o a^n$

b) $(x-a)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\ C_{n,i}\ x^{n-i}\ a^i = \binom{n}{0} x^n a^0 - \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} x^o a^n$

14.5.2 Termo Geral

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^p\ a^{n-p}$$

14.5.3 Propriedades

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n}{1} = n$
5. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ [8]
6. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ [9]

15 Probabilidade

15.1 Elementos

a) **Espaço amostral:** é o conjunto U, de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório;

b) **Evento:** é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Assim qualquer que seja $E \subseteq U$, onde E é o evento e U, o espaço amostral.

15.2 Probabilidade de um Evento

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(U)}, 0 \leq p(E) \leq 1$$

[8] Binômios complementares
[9] Relação de Stiffel

15.3 Probabilidade da união de eventos

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Obs.: Se os eventos forem mutualmente exclusivos, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

15.4 Probabilidade de um Evento Complementar

$E + \overline{E} = U \Rightarrow p(E) + p(\overline{E}) = 1$

15.5 Probabilidade da interseção de eventos independentes

$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$[10], onde A e B são eventos independentes.

15.6 Probabilidade Condicional

- $p(A \setminus B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$, (lê-se: probabilidade de A condicionada a B);
- $p(B \setminus A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$, (lê-se: probabilidade de B condicionada a A).

15.7 Lei Binominal das Probabilidades

$p = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} * p^k * q^{n-k}$

Sendo:

n: número de tentativas independentes;

p: probabilidade de ocorrer o evento em cada experimento (sucesso);

q: probabilidade de não ocorrer o evento (fracasso). Tem-se: $q = 1 - p$;

k: número de sucessos esperados.

16 Geometria Plana

16.1 Polígonos

16.1.1 Soma das Medidas dos Ângulos Internos

$$S = (n - 2) * 180^0$$

[10] Conhecida por *Teorema do produto*. O conectivo que indica a interseção de eventos é o e.

16.1.2 Soma das Medidas dos Ângulos Externos

$$S = 360^0$$

16.1.3 Número de Diagonais

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

16.1.4 Triângulos

- **Soma dos Ângulos Internos**
  A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180^0.

- **Teorema do Ângulo Externo**
  A medida de um ângulo externo de um triângulo qualquer é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo considerado.

- **Classificação**
  Os triângulos podem ser classificados quanto aos lados e quanto aos ângulos, conforme tabelas abaixo:

Quanto aos lados

Triângulo equilátero	Possui os três lados congruentes. Cada ângulo interno mede 60^0.
Triângulo isósceles	Possui dois lados congruentes. Os ângulos da base são congruentes.
Triângulo escaleno	Possui os três lados não congruentes. -

Quanto aos ângulos

Triângulo acutângulo	Possui os três ângulos agudos.
Triângulo retângulo	Possui um ângulo reto (e dois agudos). O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Essa relação é conhecida como **Teorema de Pitágoras**.
Triângulo obtusângulo	Possui um ângulo obtuso (e dois agudos).

16.1.5 Comprimento da Circunferência

$C = 2\pi r$

16.2 Áreas de Figuras Planas

16.2.1 Área do retângulo

A área de um retângulo é dada pelo produto da base pela altura, ou seja, dado um retângulo de base b e altura h então sua área é dada pela fórmula:

$$A = b.h$$

16.2.2 Área do Quadrado

Um quadrado é um retângulo que tem lados com a mesma medida, logo a área de um quadrado l será dada pela fórmula:

$$A = l * l = l^2$$

16.2.3 Área do Trapézio

A área de um trapézio de altura h e bases maior e menor medindo respectivamente B e b pode ser calculada utilizando a fórmula

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

16.2.4 Área do círculo

Considere um círculo de raio r, então podemos calcular sua área A utilizando a fórmula

$$A = \pi r^2$$

16.2.5 Área do setor circular

A área A de um setor circular é dada pela fórmula

$$A_{setor} = \frac{\alpha \pi r^2}{360^0}$$

onde α é o ângulo central e r é o raio.

16.2.6 Área da Coroa Circular

Dada uma coroa circular de raios maior e menor iguais a R e r, respectivamente, então sua área A será dada por

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

16.2.7 Área de triângulos

Segue algumas fórmulas para calcular áreas de triângulos. A primeira delas é de uso geral, caso se tenha a medida da base e da altura do triângulo. A segunda, chamada fórmula de Hierão ou Heron, pode ser utilizada quando se tem a medida dos lados do triângulo. Já na fórmula do item (iii), utiliza-se o produto de dois dos lados do triângulo pelo seno do ângulo formado por eles. A última fórmula, item (iv), é válida somente para triângulos equiláteros.

i. Fórmula Geral: $A = \dfrac{b.h}{2}$

ii. Fórmula de Hierão: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde p é o semiperímetro do triângulo, ou seja, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

iii. Utilizando seno: $A = \dfrac{a.b.\sin(a,b)}{2}$ ou $A = \dfrac{a.c.\sin(a,c)}{2}$ ou $A = \dfrac{b.c.\sin(b,c)}{2}$

iv. Triângulo Equilátero: $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

17 Geometria Espacial

17.1 Notação

Nas fórmulas desta seção, estaremos utilizando a notação:

- A_b/A_B: área da base menor/maior;
- A_l: área lateral;
- A_t: área total;
- A_f: área da face;
- n: número de faces;
- D: diagonal;
- r/R: raio da base menor/maior;
- V: volume
- g: geratriz
- M/m: apótema da pirâmide/da base

17.2 Prisma Regular

17.2.1 Área total

$A_t = A_l + 2A_B$

17.2.2 Volume

$V = A_B.h$

17.2.3 Paralelepípedo

- **Diagonal:** $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- **Área:** $A_t = 2(ab + ac + bc)$
- **Volume:** $V = a.b.c$

17.2.4 Cubo

- **Diagonal:** $D = a\sqrt{3}$
- **Área:** $A_t = 6a^2$
- **Volume:** $V = a^3$

17.3 Pirâmide Regular

17.3.1 Área total

$$A_t = A_l + A_B$$

17.3.2 Área lateral

$$A_l = n.A_f = n.\frac{g.l}{2}$$

17.3.3 Relação entre apótema da pirâmide, apótema da base e altura

$$M^2 = h^2 + m^2$$

17.3.4 Volume da pirâmide

$$V = \frac{A_B.h}{3}$$

17.3.5 Volume do tronco de pirâmide

$$V_T = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B.A_b}\right)$$

17.4 Cilindro Reto

17.4.1 Área lateral

$$A_l = 2\pi rh$$

17.4.2 Área da base

$A_B = \pi r^2$

17.4.3 Área total

$A_t = A_l + 2A_B = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

17.4.4 Volume

$V = A_B.h = \pi r^2 h$

17.5 Cone Reto

17.5.1 Área da base

$A_B = \pi r^2$

17.5.2 Medida do ângulo central

$\alpha = \dfrac{360^0 * r}{g}$ ou, me radianos $\alpha = \dfrac{2\pi * r}{g}$

17.5.3 Área lateral em função do ângulo do setor circular

$A_l = \dfrac{\alpha \pi g^2}{360^0}$ ou em radianos $A_l = \dfrac{\alpha g^2}{2}$

17.5.4 Área lateral em função do comprimento do setor circular

$A_l = \pi r g$

17.5.5 Área total

$A_t = A_l + A_B = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$

17.5.6 Volume

$V = \dfrac{A_B.h}{3} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

17.5.7 Relação entre geratriz, raio e altura

$g^2 = h^2 + r^2$

17.5.8 Volume do tronco de cone

$V_T = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R * r\right)$

17.6 Esfera

17.6.1 Área

$A_t = 4\pi r^2$

17.6.2 Volume

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

18 Geometria Analítica

18.1 Área de um triângulo usando determinante

Considere um triângulo de vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$. Então a área desse triângulo pode ser dada pela fórmula:

$$A = \frac{|D|}{2},\ onde\ D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

18.2 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos A e B, é dada por

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

18.3 Distância de um ponto a uma reta

Sendo $P = (x_0, y_0)$ um ponto qualquer do plano e $r : ax + by + c = 0$ uma reta dada, então a distância do ponto P a reta r é dada por

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

18.4 Ponto Médio

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_m = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$$

18.5 Baricentro

$$\begin{cases} x_g = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_g = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

18.6 Equações da Reta

18.6.1 Coeficiente angular de uma reta

- $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, onde (x_A, x_B) e (y_A, y_B) são pontos por onde passa a reta;
- $m = tg\ \theta$, onde θ é o ângulo entre a reta e o eixo das abscissas.

18.6.2 Equação Fundamental

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

18.6.3 Equação Geral

$$ax + by + c = 0$$

18.6.4 Equação reduzida

$$y = mx + b$$

18.6.5 Equação segmentária

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

18.7 Equações da circunferência

18.7.1 Equação Fundamental

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

18.7.2 Equação Geral

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

19 Números Complexos

Representaremos um número complexo z por $z = a + bi$, onde i é uma unidade imaginária tal que $i^2 = -1$. O número real a é chamado *parte real* do número complexo z, representado por $a = Re(z)$, e b é chamado *parte imaginária* de z, representado por $b = Im(z)$

19.1 Potência de i

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^2 = -1 \\ i^3 = i^2.i = -1.i = -i \\ i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1 \\ i^5 = i^{4.1+1} = i^4.i = i \\ i^6 = i^{4.1+2} = i^4.i^2 = 1.i^2 = i^2 = -1 \\ i^7 = i^{4.1+3} = i^3 = -i \\ \ldots \\ i^{22} = i^{4.5+2} = i^2 = -1 \\ \ldots \\ i^n = i^{4.q+r} = i^r \end{cases}$$

Obs.: Em geral $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4, ou seja, $r = 0, 1, 2$ ou 3.

19.2 Igualdade de Números Complexos

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos, então $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$.

19.3 Conjugado de um Número Complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, então seu conjugado é $\overline{z} = a - bi$

19.3.1 Propriedades do Conjugado

1. Se $z = a + bi$, então $z\overline{z} = a^2 + b^2$
2. Para um número complexo z, temos que: $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ é número real
3. Se z_1 e z_2 são números complexos, então: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

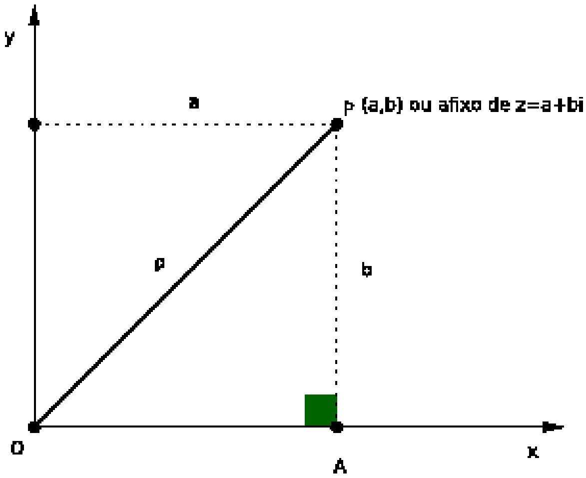
4. Se z_1 e z_2 são números complexos, então: $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$
5. Se z_1 e z_2 são números complexos, então: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

19.4 Módulo e representação gráfica (Plano de Argand-Gauss)

Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas **O** ao afixo de **z**.

i. O ponto P é chamado afixo do número complexo z;
ii. O ângulo $A\hat{O}P = \theta$ é denominado argumento do número complexo z.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo **OAP**, temos



$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

19.4.1 Propriedades do módulo de números complexos

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|zw| = |z||w|$
4. $|z| = |\overline{z}|$
5. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$
6. $z\overline{z} = |z|^2$

19.5 Operações com Números Complexos

19.5.1 Adição/Subtração

Na adição e subtração, adicionam-se e subtraem-se separadamente as partes reais e imaginárias. Assim, dados os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se que $z \pm w = (a \pm c) + (c \pm d)i$

19.5.2 Multiplicação

Na multiplicação usa-se a propriedade distributiva e o fato que $i^2 = -1$. Assim, dados os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se que $z.w = (ac - bd) + (ad + bc)i$

19.5.3 Divisão

Para dividirmos um número complexo z por outro número complexo $w \neq 0$ utilizamos a representação fracionária, racionalizando essa fração através do conceito de conjugado de w

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} . \frac{\overline{w}}{\overline{w}}$$

19.6 Argumento de um Número Complexo

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Sendo θ o argumento do número complexo z.

19.7 Forma Polar ou Trigonométrica de um Número Complexo

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, onde θ é o argumento do número complexo z.

19.7.1 Operações na Forma Trigonométrica

a) Multiplicação
$zw = |z||w|\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$

b) Divisão
$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$

c) Potenciação[11]
$z^n = |z|^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$

d) Radiciação[12]
$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$

20 Matemática Financeira

20.1 Porcentagem

O quociente $\frac{x}{100}$ é representado por $x\%$ e lido **x por cento**.
Dados dois números a e b, com $b \neq 0$, diz-que a representa $x\%$ de b se:

$$a = \frac{x}{100} * b$$

20.1.1 Aumentos e Descontos Percentuais

Sendo V_i o valor inicial e V_f o valor final de um aumento de $x\%$, teremos:

- **PARA UM AUMENTO:** $V_f = V_i + \frac{x}{100} * V_i \Rightarrow V_f = \left(1 + \frac{x}{100}\right)V_i$
- **PARA UM DESCONTO:** $V_f = V_i - \frac{x}{100} * V_i \Rightarrow V_f = \left(1 - \frac{x}{100}\right)V_i$

[11] Chamada de *primeira fórmula de Moivre*
[12] Chamada de *segunda fórmula de Moivre*

- **PARA AUMENTOS SUCESSIVOS E IGUAIS:** $V_f = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n V_i$, onde n é o número de acréscimos sucessivos.
- **PARA DESCONTOS SUCESSIVOS E IGUAIS:** $V_f = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^n V_i$, onde n é o número de decréscimos sucessivos.

20.2 Juros Simples

$$j = \frac{c.i.t}{100} \qquad M = c + j = c + \frac{c.i.t}{100} = c\left(1 + \frac{i.t}{100}\right)$$

20.3 Juros Compostos

$$M = c\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t \qquad j = M - c = c\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t - c = c\left[\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t - 1\right]$$

20.4 Aplicação ou Capital à Taxa Variável

$$M = c(1 + i_1)(1 + i_2)...(1 + i_n)$$

21 Estatística

21.1 Média Aritmética Simples

$$\overline{X}_A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

21.2 Média Aritmética Ponderada

$$\overline{X}_P = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}$$

21.3 Media Geométrica

$$\overline{X}_G = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * ... * x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

21.4 Média Harmônica (H)

$$\overline{X}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Referências

[1] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contextos e Aplicações. 1ª ed. Vol. 1,2,3. São Paulo: Ática, 2010.

[2] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8ª ed. Vol. 9. São Paulo: Atual, 1993.

[3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8ª ed. Vol. 10. São Paulo: Atual, 1993.

[4] EPPRECHT, Carlos Eduardo; MINELLO,Roberto. **Matemática Financeira e Comercial**. Rio de Janeiro: CopyMarket.com, 2000.

[5] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8ª ed. Vol. 5. São Paulo: Atual, 1993.

[6] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7ª ed. Vol. 1. São Paulo: Atual, 1993.

[7] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8ª ed. Vol. 2. São Paulo: Atual, 1993.

[8] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8ª ed. Vol. 4. São Paulo: Atual, 1993.

[9] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8ª ed. Vol. 6. São Paulo: Atual, 1993.

[10] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8ª ed. Vol. 7. São Paulo: Atual, 1993.

[11] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8ª ed. Vol. 11. São Paulo: Atual, 1993.

[12] MEDEIROS, Valéria Zuma; CALDEIRA, André Machado; SILVA, Luiza Mª O. da; MACHADO, Mª Augusta Soares. **Pré-Cálculo**. 2ª ed. São Paulo: Cergage Learning, 2010.

[13] MOYER, Robert E.; AYRES, Frank. **Trigonometry**. Four Edition. New York: Mc-Grill, 2009.

[14] VIVEIRO, Tânia Cristina Neto G.; CORREA, Marlene Limpa Pires. *Minimanual Compacto de Matemática:* Teoria e Prática. São Paulo: Rideel, 1999.