Série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

Por vezes quando aplicamos o teste da razão e testamos os limites do intervalo onde tal teste falha encontramos a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, sobre a qual os testes clássicos não são aplicáveis para justificar sua divergência.

Neste sentido, vamos explorar alguns caminhos que justificam sua divergência:

1. Expandindo a série temos: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+\cdots$

   Calculando as somas parciais, observe que:
   $s_1 = a_1 = -1$
   $s_2 = a_1 + a_2 = 0$
   $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = -1+1-1 = -1$
   $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -1+1-1+1 = 0$
   $\vdots$
   ou seja, $s_n = -1$ (para n impar), o que implica que $\lim_{n\to\infty} s_n = -1$. Por outro lado, e $s_n = 0$ (para n par) e consequentemente $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Como não há um único valor para $\lim_{n\to\infty} s_n$, este limite não existe, o que comprova que a **série diverge**.

2. Outra maneira de comprovar a divergência da série é reescrevendo-a e utilizando o teste da divergência. Podemos reescrever a série como:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n &= -1+1-1+1-1+\cdots \\
&= (1+1+1+\cdots)+(-1-1-1-\cdots) \\
&= \underbrace{(1+1+1+\cdots)}_{\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n}-\underbrace{(1+1+1+\cdots)}_{\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(1)^n-\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}1-\sum_{n=1}^{\infty}1 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

   Como temos duas séries de termos positivos, podemos aplicar o "Teste da Divergência". Neste caso $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$. Logo a série diverge. Como vimos nas aulas de Cálculo II, a soma/subtração de duas séries divergentes é divergente. Ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

   é divergente.

Observações:

1. Observe que não podemos fazer a subtração na eq. (1), pois se trata de séries divergentes e só podemos somar séries convergentes, conforme anunciamos em [Santos(2022)].

2. Observe que a soma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty}1$ é $s_n = 1+1+1+\cdots = n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, o que também mostra que $\sum_{n=1}^{\infty}1$ diverge e como $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}1-\sum_{n=1}^{\infty}1$, então $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ também **diverge**.

Referências

[Santos(2022)] V. J. Santos. Cálculo de funções de uma variável. 2, 2022. URL https://gg.gg/profwaldexsantos.